

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1953 - 011
(intern)

Schatting van de fout bij de benaderde trisectie
naar een methode van de heer A.J.A. Braak

J. Verhoeff



Schatting van de fout bij de benaderde trisectie
naar een methode van de heer A.J.A. Braak

door J. Verhoeff

In een brief d.d. 1 Juni '53 aan het Mathematisch Centrum beschrijft de heer A.J.A. Braak een methode van een benaderde trisectie, met het verzoek om een schatting van de gemaakte fout.

De te drieendelen hoek zij φ . Kies twee hoeken α en β , zodat $3\alpha > \varphi > 3\beta$. Stel $\alpha = 1/3\varphi + \delta$ en $\beta = 1/3\varphi - \varepsilon$.

Het resultaat van de constructie zij de benadering ψ . Stel $\psi = 1/3\varphi - \eta$.

Een enigszins bewerkelijke berekening leert, dat

$$\cos \psi = \cos \frac{1}{2}\varphi \sqrt{1-s^2} - \sin \frac{1}{2}\varphi \cdot s$$

waarin

$$s = \sin \frac{1}{2}\varphi \left\{ \frac{2AB(x_\beta - x_\alpha)}{Bx_\beta - Ax_\alpha} - 1 \right\}$$

$$\text{met } A = \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha \cos \alpha}{\sin 3/2\alpha}; \quad B = \frac{\sin \frac{1}{2}\beta \cos \beta}{\sin 3/2\beta}$$

$$\begin{aligned} \text{en } x_\alpha &= \cos \varphi \left(\cos \varphi + \sqrt{-\sin^2 \varphi + 2(1 - \cos 3\alpha)} - 1 \right); \\ x_\beta &= \cos \varphi \left(\cos \varphi + \sqrt{-\sin^2 \varphi + 2(1 - \cos 3\beta)} - 1 \right). \end{aligned}$$

In de veronderstelling, dat δ en ε klein zijn kunnen we de fout η benaderen met de formule

$$\eta \approx \delta \cdot \varepsilon \cdot \frac{2(E - D^2 - DF) \sin \frac{1}{2}\varphi}{\cos \frac{1}{6}\varphi} \cdot C = \delta \varepsilon \cdot K$$

$$\text{waarin } E = \frac{\sin^2 \frac{1}{3}\varphi \sin^2 \frac{1}{6}\varphi}{2 \cos^2 \frac{1}{3}\varphi \sin^2 \frac{1}{2}\varphi} - \frac{1}{8 \sin^2 \frac{1}{6}\varphi} +$$

$$\frac{1}{72 \sin^2 \frac{1}{2}\varphi} - \frac{1}{2 \cos^2 \frac{1}{3}\varphi}$$

$$D = -\frac{\sin \frac{1}{3}\varphi \sin \frac{1}{6}\varphi}{\cos \frac{1}{3}\varphi \sin \frac{1}{2}\varphi} \quad F = -\frac{3}{2} \frac{\sin^4 \frac{1}{2}\varphi + \cos^4 \frac{1}{2}\varphi}{\sin \varphi \sin^2 \frac{1}{2}\varphi}$$

$$\text{en } C = \frac{\sin \frac{1}{6}\varphi \cos \frac{1}{3}\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi}$$

Wij kunnen de grootte van K schatten onder verwaarlozing van $\sin^4 \frac{1}{6}\varphi$ en hogere machten van $\sin^2 \frac{1}{6}\varphi$. Wij vinden dan

$$K \approx \frac{-(1 + 5/6 \sin^2 \frac{1}{6}\varphi)}{27 \sin \frac{1}{6}\varphi}$$

Ter vergelijking geven we de benaderde fout van de door de heer Braak aangegeven vereenvoudigde constructie, welke alleen van α afhangt, t.w.

$$\eta \approx \delta^{-\frac{4}{3}} \sin^2 \frac{1}{6}\varphi (1 + 4/3 \sin^2 \frac{1}{6}\varphi).$$